



Joint Frequency Analysis of River Flow-Suspended Sediment Load Based on Copula Functions in the Zayanderood Sub-Basin

Mohammad Nazeri Tahroudi*¹, Rasoul Mirabbasi²

1. Department of Water Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

2. Department of Water Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

Received: 29 September 2023/ Revised: 18 October 2023/ Accepted: 22 October 2023

<https://doi.org/10.22034/arwe.2024.709854>

Abstract

The river flow-suspended sediment load relationship in basins due to the rivers flow and natural and unnatural changes does not lead to providing an accurate relationship, so it is necessary to use new methods for the development of this sector. Multivariate methods and simulation and modeling based on copula functions can be considered in this regard due to the consideration of data distribution. In this study, two-dimensional copula functions were used in the period of 2010-2019 in order to simulate and joint frequency analysis of river flow-suspended sediment load and estimate the conditional probabilities in the sub-basin of Qale-Shahrokh, Zayanderood Dam basin. While examining the dependence of the studied pair-variable and choosing appropriate marginal distributions, Frank's copula was selected as the best copula in joint frequency analysis of the pair-variable of discharge-suspended sediment load according to the RMSE and NSE values. By using the selected parameters, the simulation of the studied pair-variable of river flow-suspended sediment load with the probability of more than 80% was carried out in the selected station. So that with a probability of more than 80%, it is possible to estimate the amount of suspended sediment load given by the river flow in studied station. Finally, with the probabilities of 90-95% and 95-99%, it was suggested that the equation of forecasting suspended sediment load given by the corresponding river flow in the study area, which presented the efficiency of 84% and 82%, respectively, according to the Nash-Sutcliffe statistic.

Keywords: Frank copula, Probabilistic analysis, Return period, Suspended Sediment load.



تحلیل فراوانی توام دبی-دبی رسوب مبنی بر مفصل در زیر حوضه قلعه شاهرخ زاینده‌رود

محمد ناظری تهرودی^{*}، رسول میرعباسی^۱
۱. گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران.

دریافت: ۰۷ مهر ماه ۱۴۰۲ / اصلاحات: ۲۶ مهر ماه ۱۴۰۲ / پذیرش: ۳۰ مهر ماه ۱۴۰۲

<https://doi.org/10.22034/arwe.2024.709854>

چکیده

رابطه دبی-بار معلق رسوب در حوضه‌های آبریز با توجه به آورد رودخانه‌ها و تغییرات طبیعی و غیرطبیعی منجر به ارائه رابطه دقیق نمی‌شود، لذا نیاز است از روش‌های جدید برای توسعه این بخش استفاده کرد. روش‌های چند متغیره و شبیه‌سازی و مدل‌سازی مبنی بر توابع مفصل به دلیل در نظر گرفتن توزیع داده‌ها می‌تواند در این خصوص مورد توجه قرار گیرد. در این مطالعه جهت شبیه‌سازی و تحلیل فراوانی توام دبی-بار معلق رسوب و برآورد احتمالات شرطی در زیر حوضه قلعه شاهرخ، حوضه آبریز سد زاینده‌رود از توابع مفصل دو بعدی در دوره آماری ۲۰۱۹-۲۰۱۰ استفاده شد. ضمن بررسی وابستگی جفت متغیر مورد مطالعه و انتخاب توزیع‌های حاشیه‌ای متناسب، مفصل فرانک با توجه به مقادیر NSE و $RMSE$ به عنوان مفصل برتر در تحلیل فراوانی توام جفت متغیر دبی-بار معلق رسوب انتخاب شد. با استفاده از پارامترهای منتخب اقدام به شبیه‌سازی توام جفت متغیر دبی-بار معلق رسوب با احتمالات بیش از ۸۰ درصد در ایستگاه منتخب شد به طوری که با احتمالات بیش از ۸۰ درصد می‌توان مقادیر بار معلق رسوب را به شرط وقوع دبی جریان در ایستگاه تخمین زد. در نهایت با احتمالات ۹۵-۹۰ و ۹۹-۹۵ درصد روابط پیش‌بینی بار معلق رسوب به شرط وقوع دبی جریان در منطقه مورد مطالعه پیشنهاد گردید که به ترتیب کارایی ۸۴ و ۸۲ درصد را با توجه به آماره نش-ساتکلیف را ارائه کرد.

کلمات کلیدی: بار معلق، تحلیل احتمالاتی، دوره بازگشت توام، مفصل فرانک.

مقدمه

مهم‌ترین مسئله تحلیل چندمتغیره احتمالاتی، ایجاد ساختار وابستگی برای متغیرهای تصادفی مرتبط است (Li and Zheng, 2016). توابع توزیع چندمتغیره به طور گسترده‌ای برای مدل‌سازی دو یا چند متغیر وابسته هیدرولوژیک و ساختار وابستگی آن‌ها استفاده شده است (Salvadori and De Michele, 2007). در سال‌های گذشته، برخی از روش‌های چندمتغیره در برنامه‌های کاربردی هیدرولوژیک و محیط زیست معرفی شده‌اند. توابع توزیع تجمعی (CDF) که به طور گسترده استفاده می‌شود، گاوسی است. اما این محدودیت را دارد که توزیع‌های حاشیه‌ای باید نرمال باشد. سپس توزیع دو متغیره با توزیع حاشیه‌ای غیرنرمال پیشنهاد شد. مانند توزیع دو متغیره نمایی (Favre et al., 2002)، توزیع دو متغیره گاما (Yue et al., 2001) و توزیع دو متغیره مقادیر حدی (Adamson et al., 1999). فاور و همکاران (Favre et al., 2004) به طور خلاصه اشکالات این نوع توزیع‌ها را بیان کردند: (۱): توزیع حاشیه‌ای باید از یک خانواده باشد، (۲): برای حالت بیش از دو متغیر، واضح و قابل بیان نیست و (۳): پارامترهای توزیع حاشیه‌ای برای مدل وابستگی^۱ بین متغیرهای تصادفی نیز استفاده می‌شود. برای غلبه بر این کاستی‌ها، توابع مفصل که جدیدترین ابزار ریاضی برای تجزیه و تحلیل پدیده‌های چندمتغیره هستند، در تحلیل هیدرولوژیک مورد استفاده قرار گرفت (Xiao et al., 2008).

فاور و همکاران (Favre et al., 2004) برای توصیف وابستگی بین دبی پیک سیلاب و حجم سیلاب از مفصل‌های دومتغیره استفاده کردند. ژانگ و سینگ (Zhang and Singh, 2006) برای توزیع دو بعدی دبی پیک سیلاب و حجم سیلاب، دبی پیک سیلاب و مدت دوام آن، و حجم سیلاب و مدت دوام آن، از توابع مفصل ارشمیدسی^۲ استفاده کردند. سالوادوری و دی‌میکله (Salvadori and De Michele, 2007) برخی از مدل‌سازی‌های هیدرولوژیک را ارائه کردند که از توابع مفصل استفاده شده بود. مانند محاسبه احتمالات شرطی و دوره‌های بازگشت دو رویداد مختلف. کائو و گویندراجو (Kao and Govindaraju, 2007) یک تابع غیر ارشمیدسی^۳ از خانواده توزیع پلاکت^۴ را مورد بررسی قرار دادند و از آن برای توزیع زمانی بارش‌های حدی استفاده نمودند. فام و همکاران (fam et al., 2018) از توابع واین برای ایجادیک مدل مفهومی هیدرولوژیک بین بارش، سری‌های زمانی تبخیر و تعرق و مقادیر دبی استفاده کردند. نتایج نشان داد که اگرچه این مدل عدم قطعیت مدل‌سازی را افزایش می‌دهد، اما می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از مدل تصادفی بارش-تبخیر و تعرق، پتانسیل بالایی برای تحلیل فراوانی هیدرولوژیک دارد. ژانگ و همکاران (Zhang et al., 2018) پتانسیل روش مبتنی بر مفصل را برای توزیع احتمال سه بعدی که عرضه و تقاضای آب برای منطقه آبیاری *Luhon* در چین را توصیف می‌کند، بررسی کرده و عملکرد روش مبتنی بر مفصل را رضایت بخش عنوان کردند.

وانگ و همکاران (wang et al., 2019) از شاخص *SPI* و مقادیر بارش روزانه ۱۶ ایستگاه طی سال‌های ۲۰۱۱-۱۹۶۱ برای مطالعه مشخصه‌های خشکسالی هواشناسی (شدت و مدت) در استان آنهویی چین استفاده کردند. با انتخاب بهترین توزیع حاشیه‌ای و بهترین جفت دو متغیره، دوره بازگشت از نظر مدت زمان خشکسالی و شدت آن برآورد شد. نتایج نشان داد که متوسط و شدیدترین خشکسالی در مناطق شمال و جنوب غربی استان مورد مطالعه و کمترین آن در نواحی شمال و جنوب شرق رخ داده است. دستورانی و ناظری تهرودی (Dastourani and Nazeri Tahroudi, 2022) با استفاده از توابع مفصل به شبیه‌سازی پمپاژ آب زیرزمینی و زمان پمپاژ در دبی ثابت پرداختند. برای تخمین افت آب زیرزمینی در زمان‌های پمپاژ مختلف با احتمالات مختلف، منحنی‌های تیپ به دست آمد. آن‌ها بیان کردند که استفاده از تئوری مفصل نتایج شبیه‌سازی قابل اطمینانی ارائه کرده است. خاشعی و همکاران (Khashei et al., 2022) جهت شبیه‌سازی دو متغیره تبخیر و تعرق گیاه مرجع در ایستگاه‌های هواشناسی در کویر لوت (بم، بیرجند و طبس) در بازه زمانی ۱۳۶۳ تا ۱۳۹۸ با در نظر گرفتن سرعت باد متناظر به صورت ماهانه، از توابع مفصل و چگالی شرطی آن‌ها استفاده کردند. با انتخاب بهترین توزیع حاشیه‌ای و بهترین مفصل، تحلیل فراوانی، دوره بازگشت توام و شبیه‌سازی مبتنی بر مفصل را ارائه کردند که منجر به ارائه منحنی‌های تیپ در خصوص شبیه‌سازی دومتغیره شد. پرونوس صدیقی و همکاران (PronoosSedighi et al., 2022) نیز در تحقیقات خود به بررسی

¹ - Dependency model

² - Archimedean functions

³ - non-Archimedean function

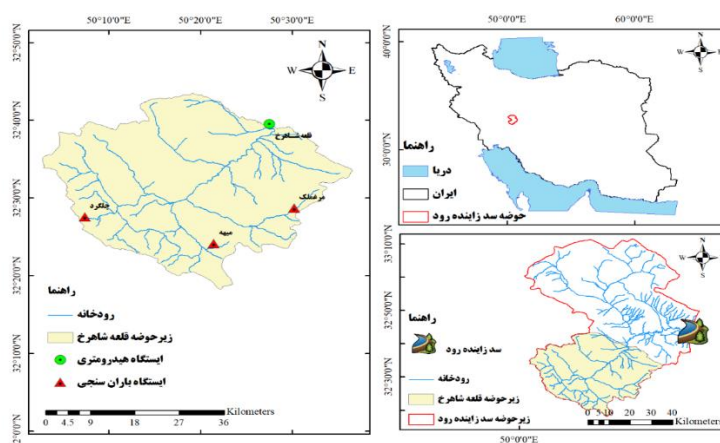
⁴ - Plackett

دقت مدل شبیه‌سازی مبتنی بر مفصل دومتغیره در شبیه‌سازی دبی جریان-دبی رسوب در حوضه رودخانه زهره پرداختند. نتایج تحقیق آن‌ها دقت، کارایی و قطعیت مدل شبیه‌سازی مبتنی بر مفصل را تایید کرد.

با توجه به مرور منابع می‌توان مشاهده کرد که عملکرد توابع مفصل در شبیه‌سازی و تحلیل فراوانی وقایع مختلف هواشناسی و هیدرولوژیک در نواحی مختلف بررسی و تایید شده است. لذا در این مطالعه سعی شده است تا با بهره‌گیری از مفصل‌های دو متغیره به تحلیل فراوانی توام جفت متغیر دبی-بار معلق رسوب در ایستگاه قلعه شاهرخ در حوضه سد زاینده‌رود، ایران پرداخته شود. این مطالعه سعی دارد ضمن برآورد تحلیل توام، به ارائه رابطه در خصوص شبیه‌سازی و برآورد بار معلق رسوب در ایستگاه مورد مطالعه با در نظر گرفتن دبی جریان با احتمالات مختلف نیز بپردازد.

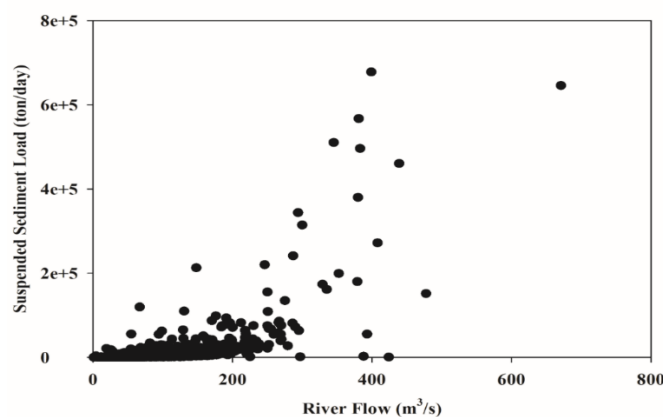
مواد و روشها

در این مطالعه، از داده‌های دبی جریان (مترمکعب بر ثانیه) و بار معلق رسوب متناظر با دبی جریان (تن بر روز) در وقایع مختلف در دوره آماری ۲۰۱۹-۲۰۱۰ به تعداد ۱۵۸۷ واقعه در زیرحوضه قلعه شاهرخ واقع در بالا دست حوضه آبریز سد زاینده رود استفاده شد. برای مقادیر دبی جریان از مقادیر ایستگاه قلعه شاهرخ واقع در خروجی زیرحوضه مورد مطالعه استفاده شد. سد زاینده‌رود، بر روی رودخانه زاینده‌رود احداث شده است. زیرحوضه قلعه شاهرخ نیز با مساحتی برابر با ۱۳۹۷ کیلومتر مربع در جنوب غربی سد زاینده‌رود واقع شده است. شکل ۱ موقعیت سد زاینده‌رود و ایستگاه‌های باران‌سنجی و هیدرومتری موجود را نشان می‌دهد. شکل ۲ نیز داده‌های اولیه مقادیر دبی جریان (مترمکعب بر ثانیه) و بار معلق رسوب متناظر با دبی جریان (تن بر روز) را در دوره آماری یاد شده نشان می‌دهد.



شکل ۱. موقعیت منطقه مورد مطالعه

Fig. 1. Location of the study area



شکل ۲. مقادیر مشاهداتی دبی جریان (مترمکعب بر ثانیه) و بار معلق رسوب متناظر با دبی جریان (تن بر روز) در دوره آماری ۲۰۱۹-۲۰۱۰ در ایستگاه قلعه شاهرخ

Fig. 2. Observed values of river flow (cubic meters per second) and suspended sediment load corresponding to river flow (tons per day) in the period of 2010-2019 at Qale Shahrokh station

پیش‌نیازهای تحلیل فراوانی مبتنی بر مفصل

در تحلیل فراوانی مبتنی بر مفصل، دو پیش‌نیاز قبل از برآورد توابع مفصل باید محاسبه شود. اولین گزینه بررسی همبستگی جفت متغیر مورد مطالعه می‌باشد که معمولاً با استفاده از دو روش اسپیرمن و تائو کندال بررسی می‌شود. در صورت همبستگی ضعیف، نمی‌توان از توابع مفصل جهت تحلیل چند متغیره استفاده کرد. به همین دلیل وجود همبستگی، لازمه و پیش شرط مطالعات مفصل می‌باشد. با توجه به نتایج ارائه شده، همبستگی بین مقادیر مورد بررسی تایید می‌شود و با اطمینان کامل می‌توان از صحت محاسبات تحلیل‌های دومتغیره اطمینان حاصل کرد. مطالعات مختلف همچون ژانگ و همکاران (Zhang et al., 2018)، کوک و همکاران (Cooke et al., 2015)، کروویکا و کوک (Kurowicka and Cooke, 2007)، بدفورد و کوک (Bedford and Cooke, 2001)، آس و همکاران (Aas et al., 2009)، بزاک و همکاران (Bezak et al., 2017)، بیواکوآ و همکاران (Bevacqua et al., 2017)، خان و همکاران (Khan et al., 2019)، گرالر و همکاران (Gräler et al., 2013)، برانر و همکاران (Brunner et al., 2019) و رضانی و همکاران (Ramezani et al., 2019) نیز آماره تائو کندال را جهت بررسی همبستگی جفت متغیرها تایید و توصیه کردند.

دومین مورد مهم، انتخاب توزیع حاشیه‌ای متناسب با داده‌های مورد مطالعه است. توزیع‌های حاشیه‌ای مختلف بر داده‌های مورد مطالعه برازش داده شده و بر اساس آن مفصل برتر انتخاب می‌شود. برای انتخاب بهترین مدل برازشی، جذر میانگین مربعات خطا^۱ ($RMSE$) و آماره نش-ساتکلیف^۲ محاسبه می‌شود که در بخش معیارهای ارزیابی مدل ارائه شده‌اند. هرکدام از توزیع‌های برازشی که بیشترین مقدار معیار نش-ساتکلیف (NS) و کمترین $RMSE$ را داشته باشند، به‌عنوان توزیع مناسب انتخاب می‌شود.

توابع مفصل

توابع مفصل ابتدا توسط اسکالر (۱۹۵۹) معرفی شد. مفصل‌ها توابعی هستند که با ترکیب توابع توزیع حاشیه‌ای یک بعدی، تابع توزیع چند متغیره را ایجاد می‌کند (نلسن، ۲۰۰۶). تابع مفصل قادر است ساختار وابستگی بین دو یا چند متغیر تصادفی را نشان دهد و اخیراً به عنوان یک روش عملی و کارآمد برای مدل‌سازی وابستگی پدیده‌های چندمتغیره ظاهر شده است. با الهام از تحقیقات جوئی (Joe, 1997) و کروویکا و کوک (Kurowicka and Cooke, 2007)، می‌توان مشاهده کرد که چگونه می‌توان داده‌های چند متغیره را با استفاده از بلوک‌های ساختاری ساده^۳ به نام جفت-مفصل، مدل‌سازی کرد. بردار $X = (X_1, \dots, X_n)$ از متغیرهای تصادفی با تابع چگالی توام $f(x_1, \dots, x_n)$ را در نظر بگیرید. این چگالی به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_n(x_n) f(x_{n-1} | x_n) f(x_{n-2} | x_{n-1}, x_n) \dots f(x_1 | x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

و این تجزیه تا رسیدن به بازتولید متغیرها، یکتا است. هر عملکرد توزیع توام به طور ضمنی شامل رفتار حاشیه‌ای متغیرهای تکی و ساختار وابستگی آن‌ها است. مفصل راهی برای جداسازی ساختار وابستگی آن‌ها ارائه می‌دهد. یک مفصل، توزیع چندمتغیره C با حاشیه‌های توزیع یکنواخت $U(0,1)$ در $[0,1]$ است. تئوری اسکالر بیان می‌کند که هر توزیع چند متغیره F با حاشیه‌های $F_1(x_1), \dots, F_2(x_2)$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود (Nazeri Tahroudi et al., 2022):

$$f(x_1, \dots, x_n) = C\{F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\} \quad (2)$$

برای برخی مفصل‌های C چند بعدی (n بعدی)، در حقیقت رابطه فوق به شرح زیر اصلاح می‌شود:

$$C(u_1, \dots, u_n) = F\{F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)\} \quad (3)$$

که در آن، $F_n^{-1}(u_n)$ معکوس توابع توزیع حاشیه‌ای هستند. با توجه به تابع چگالی توام f برای مقادیر F پیوسته افزایشی، چگالی‌های حاشیه‌ای پیوسته F_1, \dots, F_2 با استفاده از قانون زنجیره‌ای^۴ به شرح زیر برای برخی از چگالی‌های مفصل n متغیره ($C_{1 \dots n}$) برآورد می‌شود:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_{1 \dots n}\{F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\} : f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \quad (4)$$

¹ - Normalized Root Mean Square Error (NRMSE)

² - Nash-Sutcliffe

³ - Cascade of simple building blocks

⁴ - Chain law

توابع مفصل متفاوتی در حالت دو متغیره وجود دارد که مهم‌ترین و پرکاربردترین آن‌ها در هیدرولوژی و منابع آب، توابع کلایتون، فارلی-گامبل-مورگسترن، علی-میخائیل-حق، گالامبوس، فرانک، پلاکت و گامبل-هوگارد هستند که به صورت روابط زیر بیان شده‌اند (نلسن، ۲۰۰۶):

۱- مفصل علی-میخائیل-حق (AMH)^۱

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)} \quad (5)$$

که دامنه تغییرات پارامتر θ آن $-1 \leq \theta \leq 1$ است.

۲- مفصل کلایتون^۲

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \quad (6)$$

که دامنه تغییرات پارامتر θ آن $\theta \geq 0$ است.

۳- مفصل فرانک^۳

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right] \quad (7)$$

که دامنه تغییرات پارامتر θ آن $\theta \neq 0$ است.

۴- مفصل گالامبوس^۴

$$C(u, v) = uv \exp \left\{ \left[(-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{-\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (8)$$

که دامنه تغییرات پارامتر θ آن $\theta \geq 0$ است.

۵- مفصل گامبل-هوگارد (GH)^۵

$$C(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (9)$$

که دامنه تغییرات پارامتر θ آن $\theta \geq 1$ است.

۶- مفصل پلاکت^۶

$$C(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (10)$$

که دامنه تغییرات پارامتر θ آن $\theta \geq 0$ است.

۷- مفصل فارلی-گامبل-مورگسترن (FGM)^۷

$$C(u, v) = \frac{1}{2} \frac{1}{\theta - 1} \left\{ 1 + (\theta - 1)(u + v) - \left[(1 + (\theta - 1)(u + v))^2 - 4\theta(\theta - 1)uv \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (10)$$

که دامنه تغییرات پارامتر θ آن $-1 \leq \theta \leq 1$ است.

در این مطالعه، بهترین برازش توزیع مفصل، توزیع مفصل تجربی غیر پارامتری محاسبه و با مقادیر پارامتری مقایسه شد. برای یک مورد توأم دوبعدی، مفصل تجربی داده‌های مشاهده شده (u_i, v_i) به شرح زیر است:

$$C_e(u_i, v_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I \left(\frac{Q_i}{n+1} \leq u_i, \frac{P_i}{n+1} \leq v_i \right) \quad (11)$$

که در رابطه C_e برابر با مفصل تجربی، n تعداد مشاهدات و $I(A)$ پارامتر شاخص^۸ عبارت منطقی A است. چنانچه عبارت A صحیح باشد، مقدار یک و اگر نادرست باشد مقدار صفر را اختیار می‌کند. P_i و Q_i رتبه داده مشاهداتی i ام مربوط به بار معلق رسوب و دبی جریان می‌باشد.

1- Ali-Mikhail-Haq

2- Clayton

3- Frank

4- Galambos

5- Gumbel-Hougaard

6- Plackett

7- Farlie-Gumbel-Morgenstern

1 - Indicator variable

شرایط چگالی شرطی در حالت ۲ بعدی

در مرحله بعدی پس از انتخاب تابع مفصل برتر، از تابع چگالی شرطی برای تحلیل فراوانی مقادیر بار رسوب معلق به شرط وقوع دبی جریان در ایستگاه مورد مطالعه استفاده شد. چگالی شرطی را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$c(u_2 | u_1) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \Big|_{u_1} \quad (12)$$

که در آن u_1, u_2 به ترتیب مقادیر دبی جریان و بار معلق رسوب در ایستگاه مورد مطالعه می‌باشد. برای بدست آوردن نمونه u_1 از d جفت متغیر مراحل زیر انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{First : Sample } w_j & \sim U [0;1], j = 1, \dots, d \\ \text{Then : } u_1 & := w_1 \\ u_2 & := C_{2|1}^{-1}(w_2 | u_1) \\ & \vdots \\ u_d & := C_{d|d-1, \dots, 1}^{-1}(w_d | u_{d-1}, \dots, u_1) \end{aligned} \quad (13)$$

برای تعیین توابع توزیع شرطی $C_{j|j-1, \dots, 1}, j = 1, \dots, d$ ساختارهای جفت مفصل نیاز است. این یک عبارت تکراری با استفاده از توابع h برای تابع توزیع شرطی مورد نظر ارائه می‌دهد که به راحتی می‌تواند به صورت بازگشتی معکوس شود (Czado, 2019)

معیارهای ارزیابی

جذر میانگین مربعات خطا ($RMSE$) و ضریب کارایی نش-ساتکلیف (NSE) آماره‌های رایج هستند که برای انتخاب بهترین مفصل و مقایسه نتایج شبیه‌سازی استفاده می‌شوند (Nash and Sutcliffe, 1970).

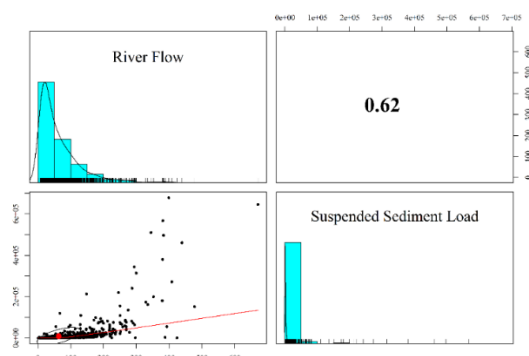
$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p_i - \bar{p}_i)^2} \quad (14)$$

$$NSE = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^N (p_i - \bar{p}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (p_i - p_{ave})^2} \right) \quad (15)$$

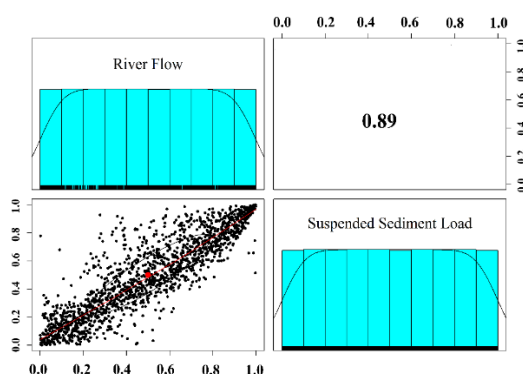
که در آن، p_i و \bar{p}_i به ترتیب برابر با مقادیر شبیه‌سازی شده و مقادیر مشاهداتی می‌باشند. N تعداد داده‌ها و p_{ave} نیز برابر با متوسط مقادیر مشاهداتی می‌باشد.

نتایج و بحث

در این مطالعه، جهت تحلیل فراوانی توام بار معلق رسوب و دبی جریان در ایستگاه قلعه شاهرخ از مقادیر یاد شده در ۱۵۸۷ واقعه در دوره آماری ۲۰۱۹-۲۰۱۰ استفاده شد. همبستگی بین متغیرهای مورد مطالعه به همراه ابر پراکندگی و هیستوگرام آن‌ها به صورت شکل ۳ در دو حالت داده‌های واقعی و داده‌های مفصلی می‌باشد. با توجه به شکل ۳ می‌توان وجود همبستگی بین متغیرهای مورد مطالعه را تایید کرد. هیستوگرام داده‌های مورد مطالعه نیز نشان دهنده شباهت توزیع پراکندگی متغیرهای مورد مطالعه می‌باشد.



(الف)



(ب)

شکل ۳. همبستگی، نمودار پراکندگی و هیستوگرام مقادیر اولیه دبی جریان (m^3/s) و بار معلق رسوب (day/ton) در ایستگاه قلعه شاهرخ (الف: مقیاس واقعی، ب: مقیاس مفصلی)

Fig. 3. Correlation, scatter diagram and histogram of the initial values of river flow (m^3/s) and suspended sediment load (ton/day) in Qale Shahrokh station (a: real scale, b: copula scale)

همبستگی تائو کندال ارائه شده در شکل ۳ برای هر دو حالت داده‌های واقعی و داده‌های مقیاس مفصلی نشان داد که مقادیر رسوب بار معلق همبستگی قابل قبول و مناسبی با مقادیر دبی متناظر در ایستگاه مورد مطالعه را دارد. این شکل نشان داد که شرط اولیه استفاده از توابع مفصل در تحلیل فراوانی وقوع توام برقرار می‌باشد. در گام بعدی به بررسی توزیع‌های حاشیه‌ای متناسب با داده‌های مورد مطالعه پرداخته شد. با استفاده از آماره‌های $RMSE$ و NSE به بررسی برازش توزیع‌های حاشیه‌ای رایج مانند توزیع نرمال، لاگ نرمال، گاما، مقادیر حدی تعمیم یافته، لئوجستیک، لاگ لوجستیک، رایلی، ناکاگامی، پارتو تعمیم یافته و ویبول پرداخته شد. نتایج برازش جفت متغیر مورد مطالعه (دبی-دبی رسوب) به صورت جدول ارائه گردید. بر اساس نتایج ارائه شده در جدول ۱، نتایج نشان داد که برای مقادیر دبی جریان، به غیر از توزیع‌های رایلی، سایر توزیع‌های حاشیه‌ای کارایی مناسبی در برازش داده‌های دبی جریان دارند ولی بر اساس آماره $RMSE$ ، کمترین میزان خطا در برازش مقادیر دبی جریان با توزیع‌های حاشیه‌ای مربوط به توزیع لاگ نرمال می‌باشد. برای مقادیر بار معلق رسوب کارایی توزیع‌های حاشیه‌ای لاگ نرمال، گاما، مقادیر حدی تعمیم یافته، لاگ لوجستیک، پارتو تعمیم یافته و ویبول در برازش مقادیر بار معلق رسوب مناسب ارزیابی شد. با توجه به مقادیر $RMSE$ ، توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته (GEV) به عنوان توزیع حاشیه‌ای برتر در برازش مقادیر بار معلق رسوب معرفی و انتخاب شد.

جدول ۱. نتایج برازش توزیع‌های حاشیه‌ای بر جفت متغیر دبی و بار معلق رسوب در ایستگاه قلعه شاهرخ

Table 1. The results of fitting the marginal distributions on the pair-variable of river flow and suspended sediment load at Qale Shahrokh station

دبی جریان		بار معلق رسوب		توزیع حاشیه‌ای
NSE	RMSE	NSE	RMSE	
0.87	10.45	0.27	24.69	Normal
0.99	2.99	0.99	3.41	Log-Normal
0.99	3.41	-0.43	34.55	Exponential
0.98	4.25	0.80	12.95	Gamma
0.98	3.78	1.00	1.65	GEV
0.94	7.29	0.52	19.93	Logistic
0.99	3.41	0.99	2.82	Log-Logistic
0.48	20.89	-2.27	52.18	Rayleigh
0.94	7.12	0.63	17.65	Nakagami
0.99	3.41	1.00	1.99	Generalized pareto
0.98	3.77	0.95	6.62	Weibull

بعد از بررسی توزیع‌های حاشیه‌ای مختلف در برازش جفت متغیر مورد مطالعه، توابع مفصل مختلف در خصوص تحلیل فراوانی توام جفت متغیرهای مورد مطالعه بررسی شد. در این مطالعه مفصل‌های مختلف اعم از کلایتون، فارلی-گامبل-مورگسترن، علی-میخائیل-حق، گالامبوس، فرانک، پلاکت و گامبل-هوگارد مورد بررسی قرار گرفت. بر اساس آماره‌های NSE و $RMSE$ مفصل‌های یاد شده مورد ارزیابی قرار گرفتند و نتایج به صورت جدول ۲ ارائه شد. در این جدول ضمن بررسی میزان خطا و کارایی مفصل‌های مورد بررسی در تحلیل فراوانی توام جفت متغیر دبی-دبی رسوب در ایستگاه قلعه شاهرخ، مقادیر ضریب توابع مفصل نیز ارائه شده است.

جدول ۲. نتایج بررسی آماره‌های خطا در تعیین توابع مفصل برتر در تحلیل فراوانی توام دبی-دبی رسوب در ایستگاه قلعه شاهرخ

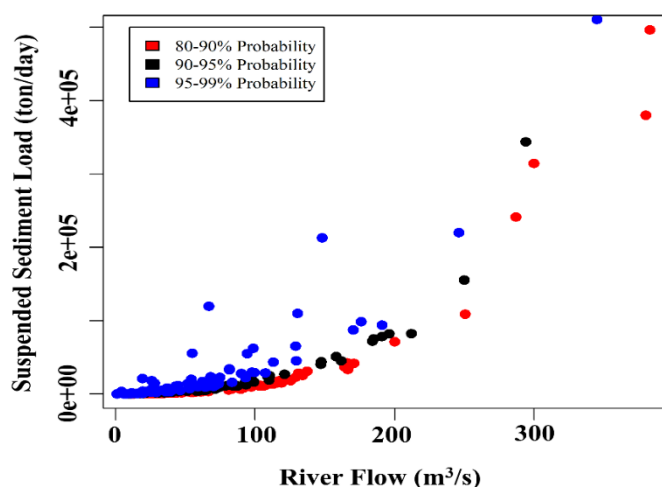
Table 2. The results of the analysis of error statistics in the determination of the best copula functions in the joint frequency analysis of river flow-suspended sediment load in Qale Shahrokh station

آماره	توابع مفصل مورد بررسی						
	Clyton	AMH	FGM	Frank	Galambos	GH	Plackett
NSE	0.81	0.81	0.69	0.81	0.80	0.79	0.80
RMSE	0.1271	0.1253	0.1600	0.1250	0.1290	0.1319	0.1290
آماره تننا	0.81	0.93	0.43	2.92	0.68	1.37	3.49

نتایج بررسی میزان خطا و کارایی توابع مفصل در تحلیل فراوانی توام جفت متغیر دبی-دبی رسوب در زیرحوضه قلعه شاهرخ نشان داد که بر اساس دو آماره NSE و $RMSE$ سه مفصل فرانک، علی-میخائیل-حق و کلایتون عملکرد مناسبی داشته و کارایی این سه تابع یکسان و ۸۱ درصد می‌باشد. با توجه به مقادیر $RMSE$ مطابق جدول ۲ می‌توان مشاهده کرد که کمترین مقدار خطا با اختلاف بسیار کم نسبت به دو مفصل علی-میخائیل-حق و کلایتون، مفصل فرانک می‌باشد. با استناد به نتایج جدول ۲، تابع مفصل فرانک به عنوان مفصل برتر برای تحلیل فراوانی توام جفت متغیر یاد شده انتخاب شد. پارامتر مفصل در مفصل منتخب، مقدار $۲/۹۲$ می‌باشد.

برآورد احتمال وقوع شرطی

در این مطالعه با استفاده از چگالی شرطی و مفصل منتخب به برآورد احتمال وقوع شرطی بار معلق رسوب به شرط وقوع دبی متناظر در ایستگاه قلعه شاهرخ پرداخته شد. نتایج برآورد احتمال وقوع شرطی به صورت شکل ۴ ارائه شد. در این شکل احتمالات بیش از ۸۰ درصد در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل ۴ می‌توان مقادیر مختلف بار معلق رسوب را با توجه به مقادیر مختلف دبی جریان با احتمالات ۸۰ تا ۹۰ درصد، ۹۰ تا ۹۵ درصد و ۹۵ تا ۹۹ درصد برآورد کرد. به طور مثال در صورت وقوع دبی جریان حدود ۱۰۰ مترمکعب بر ثانیه در منطقه مورد مطالعه، بار رسوب معلق با احتمالات ۹۰-۸۰ درصد، ۹۵-۹۰ درصد و ۹۵-۹۹ درصد به ترتیب حدود ۷۰۰۰، ۱۶۲۰۰ و ۶۲۳۰۰ تن بر روز خواهد بود. با داشتن مقادیر دبی جریان در منطقه مورد مطالعه با احتمالات مختلف می‌توان مقادیر وابسته را برآورد کرد. این منحنی به عنوان منحنی تیپ در ایستگاه مورد مطالعه در خصوص برآورد دو متغیره و شرطی مقادیر بار معلق رسوب به شرط وقوع دبی جریان می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۴. احتمال وقوع توام مقادیر بار معلق رسوب به شرط وقوع دبی متناظر در ایستگاه قلعه شاهرخ با احتمالات بیش از ۸۰ درصد
Fig. 4. Joint probability of occurrence of the number of suspended sediment load values given by river flow at Qale Shahrokh station with a probability of more than 80%

با توجه به شکل ۴ و با در اختیار داشتن مقادیر دبی جریان در ایستگاه مورد مطالعه، به راحتی می‌توان مقادیر بار معلق رسوب متناظر را با احتمال بیش از ۸۰ درصد تخمین زد. همچنین نتایج شکل ۴ نشان می‌دهد که با افزایش سطح احتمال، مقادیر برآورد شده بار معلق رسوب در دبی ثابت افزایش می‌یابد. با توجه به مطالعات مختلف در زمینه تغییرات آب و هوایی و توزیع و پراکندگی بارش‌ها (Khalili et al., 2016) وجود بارش‌های حادی افزایش یافته که سبب به هم خوردن ساختمان خاک نیز می‌شود و در پی آن افزایش بار معلق رودخانه را به همراه خواهد داشت. افزایش بار معلق رودخانه سبب کاهش عمر سازه‌های ذخیره‌سازی آب همچون مخازن سدها در پایین دست خواهد شد. لذا با توجه به شرایط موجود لزوم مدیریت منابع آب سطحی بیش از پیش احساس می‌شود. در شکل ۴ هر احتمال وقوع دامنه تغییراتی از بار معلق رسوب با احتمالات مختلف را نشان می‌دهد که تنها در شرایط توام و چندمتغیره امکان‌پذیر است. این مزیت در مطالعات پرونوس صدیقی و همکاران (Pronoos Sedighi et al., 2022) نیز مشاهده کرد.

با توجه به احتمالات برآورد شده در سطوح مختلف می‌توان رابطه پیشنهادی در خصوص برآورد بار معلق رسوب (تن بر روز) در محل ایستگاه قلعه شاهرخ به شرط وقوع دبی جریان (مترمکعب بر ثانیه) را ارائه کرد. در این مطالعه دو رابطه با احتمالات ۹۵-۹۹ و ۹۵-۹۰ درصد ارائه شده است که به شرح زیر می‌باشد:

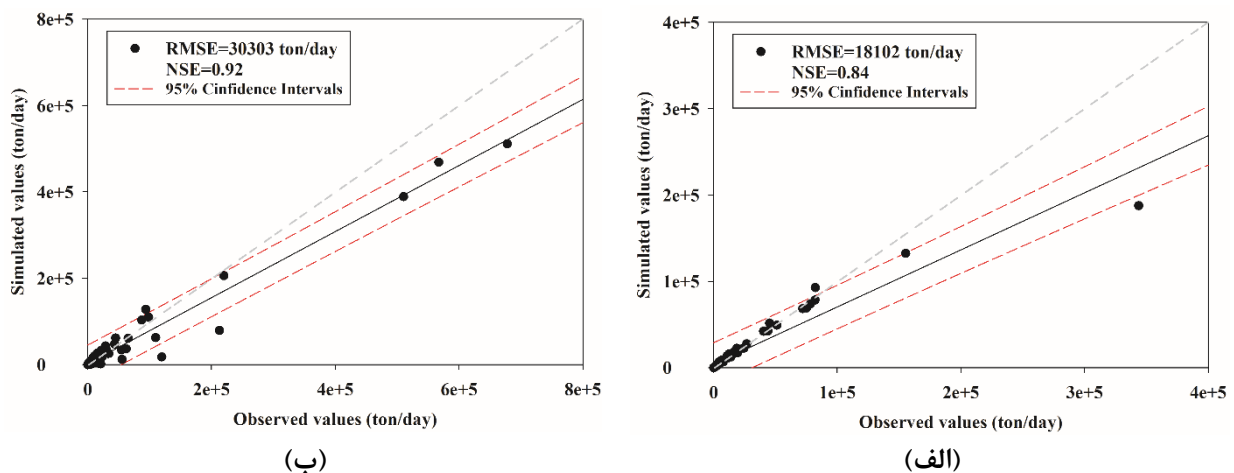
رابطه پیشنهادی جهت برآورد بار معلق رسوب به شرط وقوع دبی جریان با احتمالات ۹۵-۹۰ درصد:

$$SSL = 0.8973Q^{2.1555}$$

رابطه پیشنهادی جهت برآورد بار معلق رسوب به شرط وقوع دبی جریان با احتمالات ۹۹-۹۵ درصد:

$$SSL = 6.6323Q^{1.8789}$$

روابط پیشنهادی توسط داده‌های موجود ارزیابی شد. نتایج شبیه‌سازی مقادیر بار معلق رسوب با استفاده از روابط پیشنهادی به صورت شکل ۵ ارائه گردید. در این شکل مقادیر شبیه‌سازی شده با استفاده از رابطه ۹۵-۹۰ درصد احتمال (شکل ۵-الف) و ۹۵-۹۹ درصد احتمال (شکل ۵-ب) ارائه شده است.



شکل ۵. نتایج شبیه‌سازی مقادیر بار معلق رسوب با استفاده از رابطه‌های پیشنهادی (الف: رابطه ۹۵-۹۰ درصد احتمال و ب: ۹۹-۹۵ درصد احتمال)

Fig. 5. The results of simulation of suspended sediment load values using the proposed equations (a: 90-95 percent probability and b: 95-99 percent probability)

با توجه به شکل ۵ می‌توان مشاهده کرد که عملکرد رابطه‌های پیشنهادی در شبیه‌سازی مقادیر بار معلق رسوب در ایستگاه قلعه شاهرخ در احتمالات ۹۵-۹۰ و ۹۹-۹۵ به ترتیب عملکرد ۸۴ و ۹۲ درصد را نشان می‌دهد. رابطه پیشنهادی با احتمال ۹۵-۹۰ درصد متوسط مقادیر بار معلق رسوب در ایستگاه قلعه شاهرخ حدود ۱۷۲۸۴ تن بر روز برآورد شد که نسبت به مقادیر واقعی حدود ۰/۹ درصد کمتر برآورد شده است. در مورد مقادیر کمینه بار معلق رسوب نیز رابطه پیشنهادی با احتمال ۹۵-۹۰ درصد مقادیر بار معلق رسوب را حدود ۱۶ درصد نسبت به مقادیر مشاهداتی بیشتر برآورد کرده است. این رابطه (۹۵-۹۰ درصد احتمال) مقادیر بیشینه بار معلق رسوب را نیز ۲/۵ درصد کمتر برآورد کرده است.

رابطه پیشنهادی با احتمالات ۹۹-۹۵ درصد که کارایی ۹۲ درصد در شبیه‌سازی بار معلق رسوب را ارائه کرده بود، توانست متوسط مقادیر بار معلق رسوب در ایستگاه قلعه شاهرخ را حدود ۳۵۱۲۱ تن بر روز شبیه‌سازی کرده است که نسبت به مقادیر مشاهداتی حدود ۷ درصد کمتر می‌باشد. رابطه‌های پیشنهادی با توجه به آماره نش-ساتکلیف از عملکرد مناسبی برخوردار می‌باشند که حدود اطمینان ۹۵ درصد شبیه‌سازی نیز این موضوع را نشان می‌دهد. رابطه‌های پیشنهادی با توجه به این که در محدوده اطمینان مشخص بر مبنای توابع مفصل برآورد شده‌اند، نسبت به حالت معمول از دقت بالاتری برخوردار می‌باشند.

تحلیل فراوانی دو متغیره دبی و بار رسوب معلق در هر منطقه می‌تواند ابزار مناسبی جهت شناخت توام این دو پدیده باشد و نتایج بهتری نسبت به مدل‌های تک‌متغیره ارائه دهد. مدیریت و برنامه‌ریزی حوضه مستلزم کاربرد این روش‌ها در مطالعات کاربردی است.

نتیجه‌گیری

در این مطالعه تحلیل فراوانی توام بار معلق رسوب متناظر با دبی جریان ایستگاه قلعه شاهرخ در دوره آماری ۲۰۱۹-۲۰۱۰ با استفاده از مفصل‌های دو بعدی صورت پذیرفت. بدین منظور، ضمن تایید وابستگی و انتخاب توزیع‌های حاشیه‌ای *GEV* و *lognormal* به ترتیب برای مقادیر بار معلق رسوب و دبی جریان، به بررسی مفصل‌های مختلف در تحلیل فراوانی توام پرداخته شد. با توجه به معیارهای *RMSE* و *NSE*، مفصل فرانک به عنوان مفصل مناسب‌تر انتخاب گردید. با در نظر گرفتن توزیع‌های حاشیه‌ای منتخب و مفصل فرانک و همچنین ضریب مفصلی برابر ۲/۹۲، تحلیل فراوانی توام جفت متغیره دبی-بار معلق رسوب در ایستگاه قلعه شاهرخ برآورد شد. نتایج نشان داد که با تحلیل همزمان دو متغیره دبی و بار معلق رسوب در ایستگاه مورد مطالعه می‌توان نمودار احتمالاتی توام این دو متغیره را با احتمالات بیش از ۸۰ درصد ارائه کرد. با احتمال بیش از ۸۰ درصد می‌توان مقادیر بار معلق رسوب را متناظر با دبی مربوطه ارائه کرد. به طور مثال در صورت وجود دبی جریان در محدوده ۱۹۰ تا ۲۱۰ مترمکعب بر ثانیه، با احتمالات ۹۰-۸۰، ۹۵-۹۰ و ۹۹-۹۵ درصد به ترتیب حدود ۷۱۲۰۰، ۷۸۰۰۰ و ۹۳۰۰۰ تن بر روز برآورد می‌شود. با احتمالات برآورد شده اقدام به ارائه رابطه در خصوص برآورد شرطی بار معلق رسوب مبتنی بر دبی جریان شد. ضریب کارایی *NSE* کارایی رابطه‌های پیشنهادی را در شبیه‌سازی بار معلق رسوب در منطقه

مورد مطالعه تایید کرد. در این مطالعه با ارائه منحنی احتمالاتی و همچنین روابط شبیه‌سازی با احتمالات مختلف، رویکردی پیشنهاد شده است که می‌توان مقدار بار رسوب معلق رودخانه را با احتمالات بیش از ۹۰ درصد برآورد کرد. این روش با توجه به این که از توابع توزیع آماری داده‌ها و توابع مفصل متناسب با توزیع آماری استفاده می‌کند، رابطه پیشنهادی مختص منطقه بوده و بومی‌سازی شده است و به همین دلیل روش پیشنهادی هیچ گونه محدودیت جغرافیایی و اقلیمی ندارد. این رویکرد با ارائه نمودارهای مختص برای هر منطقه می‌تواند در مدیریت بار معلق رسوب با توجه به افزایش بارش‌های حدی و سیلاب‌های اخیر مورد استفاده قرار گرفته و مفید باشد.

تقدیر و تشکر

این اثر تحت حمایت مادی صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور (INSF) برگرفته شده از طرح شماره "۴۰۰۵۰۱۱" انجام شده است.

منابع

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., & Bakken, H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and economics*, 44(2), 182-198.
- Bedford, T., & Cooke, R. (2001). *Probabilistic risk analysis: foundations and methods*. Cambridge University Press.
- Bevacqua, E., Maraun, D., HobækHaff, I., Widmann, M., Vrac, M. (2017). Multivariate statistical modelling of compound events via pair-copula constructions: analysis of floods in Ravenna (Italy). *Sciences*, 21(6), 2701-2723.
- Bezak, N., Rusjan, S., KramarFijavž, M., Mikoš, M., & Šraj, M. J. W. (2017). Estimation of suspended sediment loads using copula functions. *Water*, 9(8), 628.
- Brunner, M. I., Furrer, R., & Favre, A. C. (2019). Modeling the spatial dependence of floods using the Fisher copula. *Hydrology and Earth System Sciences*, 23(1), 107-124.
- Cooke, R. M., Kurowicka, D., & Wilson, K. (2015). Sampling, conditionalizing, counting, merging, searching regular vines. *Journal of Multivariate Analysis*, 138, 4-18.
- Czado, C. (2019). Analyzing dependent data with vine copulas. *Lecture Notes in Statistics*, Springer, 222.
- Dastourani, M., & Nazeri Tahroudi, M. (2022). Toward coupling of groundwater drawdown and pumping time in a constant discharge. *Applied Water Science*, 12(4), 1-13.
- Favre, A. C., El Adlouni, S., Perreault, L., Thiémondge, N., & Bobée, B. (2004). Multivariate hydrological frequency analysis using copulas. *Water Resources Research*, 40(1).
- Favre, A. C., Musy, A., & Morgenthaler, S. (2002). Two-site modeling of rainfall based on the Neyman-Scott process. *Water Resources Research*, 38(12), 43-1.
- Gräler, B., van den Berg, M., Vandenberghe, S., Petroselli, A., Grimaldi, S., De Baets, B., & Verhoest, N. (2013). Multivariate return periods in hydrology: a critical and practical review focusing on synthetic design hydrograph estimation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(4), 1281-1296.
- Joe, H. (1997). *Multivariate models and multivariate dependence concepts*: Chapman and Hall/CRC.
- Kao, S. C., & Govindaraju, R. S. (2007). A bivariate frequency analysis of extreme rainfall with implications for design. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 112(D13).
- Khalili, K., Tahoudi, M. N., Mirabbasi, R., & Ahmadi, F. (2016). Investigation of spatial and temporal variability of precipitation in Iran over the last half century. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 30(4), 1205-1221.
- Khan, F., Spöck, G., & Pilz, J. (2020). A novel approach for modelling pattern and spatial dependence structures between climate variables by combining mixture models with copula models. *International Journal of Climatology*, 40(2), 1049-1066.
- Khashei, A., Shahidi, A., Nazeri-Tahroudi, M., & Ramezani, Y. (2022). Bivariate simulation and joint analysis of reference evapotranspiration using copula functions. *Iranian Journal of Irrigation & Drainage*, 16(3), 639-656.
- Kurowicka, D., & Cooke, R. M. (2007). Sampling algorithms for generating joint uniform distributions using the vine-copula method. *Computational statistics & data analysis*, 51(6), 2889-2906.
- Li, F., & Zheng, Q. (2016). Probabilistic modelling of flood events using the entropy copula. *Advances in Water Resources*, 97, 233-240.
- Nash, J. E., & Sutcliffe, J. V. (1970). River flow forecasting through conceptual models part I—A discussion of principles. *Journal of Hydrology*, 10(3), 282-290.
- Nazeri Tahroudi, M., Ramezani, Y., De Michele, C., & Mirabbasi, R. (2022). Application of Copula Functions for Bivariate Analysis of Rainfall and River Flow Deficiencies in the Siminehrood River Basin, Iran. *Journal of Hydrologic Engineering*, 27(11), 05022015.
- Pham, M. T., Vernieuwe, H., De Baets, B., & Verhoest, N. (2018). A coupled stochastic rainfall-evapotranspiration model for hydrological impact analysis. *Hydrology and Earth System Sciences*, 22(2), 1263-1283.

- Pronoos Sedighi, M., Ramezani, Y., Nazeri Tahroudi, M., & Taghian, M. (2022). Joint frequency analysis of river flow rate and suspended sediment load using conditional density of copula functions. *Acta Geophysica*, 1-13.
- Ramezani, Y., Nazeri Tahroudi, M., & Ahmadi, F. (2019). Analyzing the droughts in Iran and its eastern neighboring countries using copula functions. *IDŐJÁRÁS/QUARTERLY JOURNAL OF THE HUNGARIAN METEOROLOGICAL SERVICE*, 123(4), 435-453.
- Salvadori, G., & De Michele, C. (2007). On the use of copulas in hydrology: theory and practice. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 369-380.
- Sklar, M. (1959). Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8, 229-231.
- Wang, R., Zhao, C., Zhang, J., Guo, E., Li, D., Alu, S., & Dong, Z. (2019). Bivariate copula function-based spatial-temporal characteristics analysis of drought in Anhui Province, China. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 131(5), 1341-1355.
- Xiao, Y., Guo, S., Liu, P., & Fang, B. (2008). A new design flood hydrograph method based on bivariate joint distribution. *IAHS Publications-Series of Proceedings and Reports*, 319, 75-82.
- Yue, S., Ouarda, T. B. M. J., & Bobée, B. (2001). A review of bivariate gamma distributions for hydrological application. *Journal of Hydrology*, 246(1-4), 1-18.
- Zhang, D., Yan, M., & Tsopanakis, A. (2018). Financial stress relationships among Euro area countries: an R-vine copula approach. *The European Journal of Finance*, 24(17), 1587-1608.
- Zhang, L., & Singh, V. (2006). Bivariate flood frequency analysis using the copula method. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11(2), 150-164.